

Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια πολυωνυμική συνάρτηση με βαθμό  $n > 2$  για την οποία ισχύουν τα επόμενα:

- $6f(x) = \frac{1}{36} \cdot f''(x)^3 + f''(x) + 6$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  και
- η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(0, -1)$
- Επιπλέον έστω  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \cdot \eta \mu x} - e^{t^2} + 1 - \text{συν}(xt)}{\ln(t+1)} \quad \text{κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i. Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση  $f$  έχει βαθμό  $n=3$ .

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ii. Αποδείξτε ότι  $g(x) = \eta \mu x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

iii. Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα η οποία είναι θετική.

iv. Προσδιορίστε όλα τα ζεύγη των πραγματικών αριθμών  $(a, b)$  που είναι τέτοια ώστε  $f'(a) = g'(b)$ .

v. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μια κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

vi. Εάν  $(\epsilon)$  είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  που αναφέρεται στο ερώτημα (v) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική της  $f$ , την ευθεία  $(\epsilon)$  και τον άξονα  $\gamma' \gamma$ .